Histoire et origine des symboles mathématiques

Par Dimitri PIANETA
mai 2022

Ce document retrace les principaux symboles mathématiques.

Les notations

1) Les opérations

- Plus et moins[1] : +, -

WIDMANN (Allemagne), 1489 dans un traité d'arithmétique commerciale.

- Multiplication[2] : × et .

William OUGHTRED (1574-1660, Angleterre), en 1631 pour × et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716, Allemagne), en 1698 pour le point (.).

- Division[3] : Multiples symboles
- Exposants[4] :

Nicolas CHUQUET (15ème siècle), (mais généralisé bien après)

- **Le point pour le produit scalaire** a été employé en 1902 dans Vector Analysis de J.W. GIBBS par E.B. Wilson. 4
- **× pour le produit de vecteurs** a été employé en 1902 dans Vector Analysis de J.W. GIBBS par E.B. Wilson.
- **Plus-ou-moins (±)** a été employé par William Oughtred (1574-1660) dans Clavis Mathematicae, édité en 1631.
- **Le symbole de produit (∏)** a été introduit par René Descartes, selon Gullberg mais Cajori indique que ce symbole a été présenté par Gauss en 1812.
- La racine carrée[5] **√** par Christophe RUDOLFF (Allemagne), en 1525.
- **Addition ∑**. Le symbole d'addition (∑) a été employé la première fois par Leonhard Euler (1707-1783) en 1755 :

"*Signo de sumus de vsi de denotandam de differentiam d'annonce de Quemadmodum [lettre Delta en capital], signo d'indicabimus de summam d'ita (∑).*"
Dans differentialis de calculi d'Institutiones (1755).

Ce symbole a aussi été employé par Lagrange, mais sa généralisation fut lente.

- **Valeur absolue d'une différence.**
  Le tilde (~) a été utilisé par William Oughtred (1574-1660) selon Smith, dans le Clavis Mathematicae, composé environ 1628 et édité à Londres en 1631.
- **Matrices[6].**
  En 1841, Arthur CAYLEY (1821-1895) a employé la notation moderne pour représenter le déterminante d'une matrice, une ligne verticale simple des deux côtés des nombres.

  La notation est apparue dans le journal mathématique de Cambridge, vol. II (1841), P. 267-271. Cependant, Cayley a employé des virgules pour séparer des entrées dans des rangées (Cajori vol. 2, page 92).

2) **Le symbolisme algébrique : utilisation des lettres**

Maurolico, dit Francesco de Messina (début 16e) et François Viète (1540-1603, France) en sont les principaux acteurs.

3) **Les parenthèses (.) :**

Raphaël BOMBELLI (Bologne, 1522?-1572)

4) **Les relations entres objets <, >, =, ≤ ≥**

- **Egalité[7]** :
  Robert RECORDE (1510-1558, Angleterre), en 1557.

- **<, > inférieur stricte, supérieur stricte** :

  Les symboles < et > apparaissent dans Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas de Thomas Harriot (1560-1621), publié de façon pasthume en 1631 : "Signum majoritatis ut a > b significet a majorem quam b" and "Signum minoritatis ut a < b significet a minorem quam b."

- **≤ ≥ , inférieur ou égal, supérieur ou égal :**
  ≦≧ Pierre BOUGUER (1698-1758) utilise ces symboles en 1734.
  En 1670, John WALLIS utilise des symboles similaires avec une seule barre horizontale.
  Le symbole actuel est sans doute le fruit d'une évolution typographique plus moderne.

- **≠, différent de** :

≠ EULER (1707 - 1783) utilise une graphie proche de celle usuelle (barre verticale pour EULER).

- **≈ presque égal :**
  Ce symbole a été employé en 1875 par Anton Steinhauser dans *der Mathematik* de Lehrbuch,« Algèbre ». Le même symbole a été employé en 1832 par Wolfgang Bolyai pour signifier l'égalité absolue.

5) **Constantes célèbres**

- **PI** : π

William JONES (1675-1749) en 1706 dans des mathesios de palmariorum de synthèse.

- **e** :exponentielle

Cette constante, 2.71828…, a été mentionnée dans la traduction anglaise d'Edouard Wright du travail de NEPPER sur des logarithmes, éditée en 1618.

Le premier symbole utilisé pour la constante mentionnée par Cajori est la lettre b employée par Leibniz dans les lettres à Huygens en 1690 et 1691.

Leonhard Euler (1707-1783) a présenté e pour cette constante dans un manuscrit, Meditatio dans l'instituta de nuper de tormentorum d'explosione d'Experimenta (méditation sur des expériences faites récemment sur la mise à feu du canon), écrit à la fin de 1727 ou au début de 1728 (quand Euler avait juste 21 ans). Le manuscrit a été imprimé la première fois en 1862.

"Pour le nombre dont le logarithme est unité, laisser e être écrit, qui est 2.7182817… dont le logarithme [sic] selon Vlacq est 0.4342944…" [traduit du latin par Florian Cajori].

Euler utilise ensuite e dans une lettre adressée à Goldbach le 25 novembre 1731, écrivant qu'e « dénote que le nombre dont le logarithme hyperbolique est égal à 1. »
Il apparait aussi dans Mechanica d'Euler (1736), dans lequel il a créé les bases de la mécanique analytique.

- **Le nombre d'or φ** :

Selon les courbes de la vie : Étant un compte des formations en spirale et de leur application à la croissance en nature, à la Science, et à l'art : En se référant tout particulièrement aux manuscrits du da Vinci (1914) de Leonardo par monsieur Theodore Andrea Cook (1867-1928), page 420 :

"M. Mark Barr… suggéré… que ce rapport devrait s'appeler la proportion de phi pour des raisons données ci-dessous…. Le phi de symbole a été donné à cette proportion en partie parce qu'il a un bruit familier à ceux qui luttent constamment avec pi et en partie parce que c'est la 1ère lettre du nom de Pheidias, dans lequel la sculpture cette sculpture est vue pour régner quand la distance entre les points saillants sont mesurées."

- **i pour l'imaginaire** a été employé la première fois par Leonhard Euler (1707-1783) dans un mémoire présenté en 1777 mais non édité jusqu'en 1794 dans ses « integralis de calculi d'Institutionum. »

6) <u>Les nombres complexes ou imaginaires</u>

- **Imaginaire** : DESCARTES (1596-1650), 1637
- **Module** : ARGAND (1768-1822, Suisse), 1806
- **Argument** : CAUCHY (1789-1857), 1838
- **Nombre complexes** : GAUSS (1777-1855), 1831
- **Nombre N(z) carré du module** : GAUSS(1777-1855), 1831
- **Notation |z| pour le module** : K.WEIERSTRASS (1815-1897)
- **Notation i** : EULER(1707-1783), 1777, reprise par GAUSS(1777-1855)
- **Représentation géométrique des complexes** :

Le Danois WESSEL (1745-1818) en 1798 et le Suisse ARGAND (1768- 1822) en 1806 propose cette représentation, sans trop d'écho. C'est GAUSS (1777-1855) qui expose la théorie et CAUCHY (1789-1857) qui la diffuse.

7) Les fonctions

7.1 Les notations fonctionnelles

Les notations utilisées pour indiquer une fonction ont évolué en même temps que la notion même de fonction est apparue.

- **Symbole f(x)** :

  Le symbole f(x) pour désigner une fonction de la variable x, voit sa première utilisation avec Leonhard EULER (1707-1783) en 1734 dans *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*.

  Le mot fonction est emprunté sous la forme simplifié *funcion* (1370) au latin *functio* "accomplissement, exécution", en français courant.

  Au 18ème Euler (1707-1783) propose l'idée qu'une suite de courbes, donc d'expressions, représentait une fonction.

  C'est Leibniz (1646-1716) qui utilise le mot fonction pour la première fois en mathématiques en 1673, mais la première définition correcte fut donnée par J.Bernouilli (1654-1705).

- **Fonction β.**

  Le symbole de la fonction bêta d'EULER est introduit par le mathématicien et astronome français Jacques P. M. BINET (1786-1856) en 1839.

- **Fonction Γ.**

  Le symbole de cette autre fonction d'EULER est introduit par Adrien-Marie LEGENDRE (1752-1833) dans son Exercices de Calcul integral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadrantes.

- **Fonction Zêta de RIEMANN ζ :**

  Le symbole ζ de cette fonction introduite par Bernhard Riemann (1826-1866) en 1857, apparait dans dans "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (1859).

- **Fonction de Bessel J.**

  Le mathématicien danois HANSEN Peter Andreas (1795 - 1874) utilise la lettre J pour cette fonction en 1843 dans Ermittelung der absoluten Störungen, mais cette notation a varié depuis. L'allemand BESSEL Friedrich Wilhelm (1784-1846) lui-même utilise la lettre I.

- **Fonction logarithme. Log (puis ln)**

  Le symbole Log apparait comme abréviation de logarithme dans A Description of the Admirable Table of Logarithmes (1616), une traduction anglaise d' Edward Wright des travaux de NEPPER.

  Log. était utilisé par KEPLER Johannes (Weil der Stadt 1571 - Ratisbonne 1630) en 1624 dans Chilias logarithmorum.

  log. était utilisé par l'italien CAVALIERI Bonaventura (1598-1647) dans Directorium generale Vranometricum en 1632.

  log apparait en 1647 dans une édition des Clavis mathematicae de William Oughtred (1574-1660).

  Log_a (logarithme de base a), aurait été (Cajori n'en parle pas) introduit par Edmund GUNTER (1581-1626).

  ln (notation contemporaine) est utilisé en 1893 par l'américain Irving STRINGHAM (1847-1909) dans Uniplanar Algebra.

- **Fonction partie entière : E(x) et [x]**

  [x] est utilisé par GAUSS (1808) dans sa théorie des nombres. Adrien-Marie LEGENDRE (1752-1833) utilise la notation E(x).

- **La fonction signe de : sgn(x)**

  Le symbole [a], pour representer 0, 1, or -1, selon le signe de a est introduite par Leopold KRONECKER (1823-1891).

- **La fonction π(x).**

  π(x), représente le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Cette notation est utilisée par en 1909 dans Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen par le mathématicien allemand LANDAU Edmund Georg Hermann (1877-1938). Cette fonction fut étudiée initialement par EULER Leonhard (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783), mais dans in Novi Comm. Ac. petrop., 8, 1760-1, 74, il n'utilise pas de notation particulière. Dans Comm. Arith., 1, 274, puis dans Acta Ac. Petrop., 4 II (or 8), 1780 (1755), 18, il utilise la notation πN.

7.2 Histoire de la notation de fonction

- **Définition moderne** :

  En mathématiques, une fonction est une relation entre un ensemble d'entrées et un ensemble de sorties autorisées avec la propriété que chaque entrée est reliée à une sortie exactement.
  Une fonction est donc une relation qui, à un élément donné, en associe un autre UNIQUE.

- Remarque : Nous verrons qu'il existe aussi des fonctions multivoques comme le logarithme négatif. Ces fonctions associent, à un élément, plusieurs autres éléments.

On note généralement :

- xx : élément de départ.
- f(x)f(x) : élément associé à x qui l'on lit "f de x",
  f(x)f(x) est l'image de xx par ff.
- la fonction associée f se note par une flèche : x⟼f(x)x⟼f(x)

Résumé historique :

- Jusqu'au 17ème siècle, la notion de fonction n'est pas définie avec rigueur, le concept reste assez vague.
- Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) dans un cadre géométrique. Il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques.
- Puis BERNOULLI Jean (1667-1748) propose la notation : Φx
- Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), en introduisant la fonction discontinue partout, caractéristique des irrationnels (qui prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon), définit explicitement la fonction comme nous la définissons aujourd'hui.
- Cependant, l'idée de relation entre les quantités, prend naissance avec les mathématiques elles-mêmes et donc chez les mathématiciens babyloniens et grecs.

7.2.1 La notion de fonction dans l'Antiquité

a) Les Babyloniens

Les mathématiciens babyloniens appartiennent à un ensemble de peuples ayant vécu en Mésopotamie entre 5 000 av. J.-C. et le début de l'ère chrétienne. Ils nous ont laissé des traces de leurs recherches par l'intermédiaire de tablettes d'argiles en écriture cunéiforme qui, pour 300 d'entre elles découvertes à ce jour, traitent de mathématiques.

Sur ces tablettes, dont les plus anciennes datent de la première dynastie (vers - 1 800), on trouve des tables sexagésimales de réciproques, de carrés, de cubes, de racines cubiques...
La multiplication est effectuée par exemple en se référant à des tables de multiplication, établies certainement par additions successives. L'utilisation de tables de réciproques permet alors de remplacer les divisions par des multiplications.

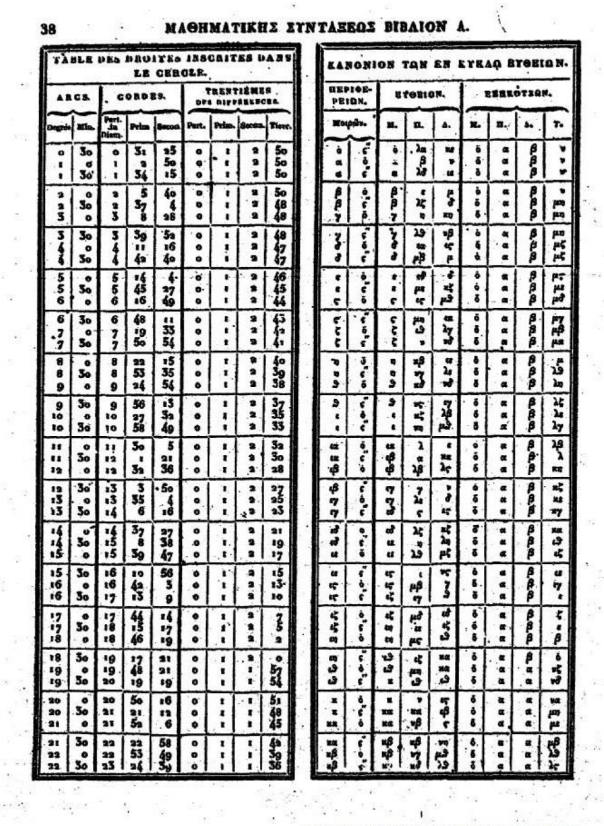
Les babyloniens, réputés pour leurs remarquables aptitudes en astronomie, utilisaient ces tables pour calculer les éphémérides du soleil, de la lune.

b) Les Grecs

En acoustique, les mathématiciens de la fraternité pythagoricienne au 6ème siècle av. J.-C., recherchèrent des relations entre la hauteur des sons émis par des cordes pincées et la longueur de ces cordes.

En astronomie, les mathématiciens grecs d'Alexandrie dressent des tables donnant la longueurs des cordes de cercles de rayon fixé, ces sont les fameuses premières tables de sinus que l'on peut observer dans l'Almageste de PTOLÉMÉE Claude (2ème siècle).

Ces tables sont visibles sur le site gallica de la BNF.



38 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS. CORDES. TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ. ΕΥΘΕΙΩΝ. ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ.

L'Amageste (Ptolémé, 2ème siècle) : gallica.bnf.fr

Source : gallica.bnf.fr

Cependant, comme le font fort justement remarquer A. Dahan et J. Peiffer dans [DaDaPe], il serait trop simpliste de voir en ces tables de Ptolémée, les premières fonctions. Elles n'en sont que le germe et ne sont considérées que comme des tableaux de valeurs numériques utiles pour les calculs. On ne considère jamais l'entité qui permet de passer d'une colonne de nombres à l'autre. Ainsi, même si l'on considère une fonction comme une relation entre des valeurs comme dans la définition moderne, le tables de Ptolémée ne sont que des relations entre éléments discrets constants d'ensembles finis.

Il n'est absolument pas question de quantités variables ni de lois de variations

7.2.2 <u>La notion de fonction : Les Ecoles d'Oxford et de Paris, 14ème siècle</u>

La cinématique, c'est à dire l'étude des mouvements de solides, est le grand sujet d'étude des écoles de philosophie naturelle d'Oxford et de Paris au 14ème siècle.

Les mathématiciens de ces écoles dont le français ORESME Nicolas (Oresme, près de Bayeux 1325 - Lisieux 1382) et les anglais BACON Roger (1214 - 1294) ou BRADWARDINE Thomas (1290 - 1349) proposent de modéliser les phénomènes physiques et mettent en évidences des relations entre vitesse, force, temps et résistance, tout cela, de façon géométrique bien sûr.

Ils quantifient des phénomènes comme la vitesse, la chaleur, la densité et leurs prêtant des qualités pouvant varier de façon continue.

Des fonctions du temps apparaissent et ORESME Nicolas (1325 - 1382) écrira :

- "*Chaque chose mesurable, à l'exception des nombres, est imaginée comme une quantité continue*."
  ORESME Nicolas (1325-1382)

7.2.3 Etude des trajectoires, 17ème siècle

Avec le français VIÈTE François (1540-1603) qui introduit de façon systématique le calcul littéral (voir histoire du symbolisme algébrique), vient le temps des formules.

La notion de fonction, qui était alors uniquement associée à une courbe, va maintenant être lié à une formule comme le met en évidence la célèbre formule de GALILEE en 1623 qui propose ses lois sur la chute des corps :

- *Le grand livre de l'univers est écrit en langage mathématique.* GALILEE en 1623

Au début du 17ème siècle, le physicien et mathématicien allemand Johannes KEPLER (1571 – 1630), énonce ses lois sur les trajectoires elliptiques des planètes.

Toutes les fonctions introduites à cette période sont considérées comme des trajectoires de points en mouvement.

7.2.4 1ère définition de fonction : Courbes géométriques et transcendantes

Le mathématiciens français DESCARTES René du Perron (1596-1650) propose d'établir une classification des courbes :

- Les courbes géométriques : Les coordonnées x et y sont reliées par une équation polynômiale.
- Les courbes mécaniques ou transcendantes : comme le logarithme, DESCARTES les rejette.

Pour lui, selon le philosophe Jules VUILLEMIN (1920-2001), une fonction est donc :

- "*Est fonctionnelle pour DESCARTES, une relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée, une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques*". Jules VUILLEMIN (1920-2001)

7.2.5 2ème définition de fonction : GREGORY James, 1667

Les mathématiciens qui succèdent à DESCARTES découvrent alors le développement des fonctions en séries infinies de puissances.

Le mathématicien allemand MERCATOR Nicolaus (1620 Eutin -1687 Versailles) est le premier avec NEWTON, à proposer une technique fine permettant de développer des fonctions en séries. En 1668, dans Logarithmotecnia, il trouve l'aire de l'hyperbole en développant en série géométrique 1/(1+x) puis, en intégrant terme à terme comme l'anglais WALLIS John (1616-1703), il obtient le développement de la série qui porte son nom mais qui fut obtenue par Sir Isaac Newton (1643 – 1727) en 1665. [Dieudo] p 123

La série de Mercator est définie par :

ln(1+x)=x−x22+x33−x44⋯ln(1+x)=x−x22+x33−x44⋯
C'est le mathématicien écossais James GREGORY (1638 – 1675) qui propose la meilleure définition de la notion de fonction au 17ème siècle.

Une fonction est définie comme une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable.

Dans Vera circuli et hyperbolae quadratura, 1667.

Il précise qu'aux cinq opérations de l'algèbre (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine), il faut en ajouter une sixième définie comme un passage à la limite.

7.2.6 <u>Le terme fonction apparaît</u> : LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716)

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) en 1673 dans un manuscrit inédit "La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions".

- *"J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe; comme sont les abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente ...et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on ne peut figurer."*

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716), in La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions, 1673.

Cette définition se retrouve dans des articles de 1692 et 1694 et est reprise par le mathématicien suisse BERNOULLI Johann francisé Jean (1667-1748) en 1697.

- BERNOULLI Jean (1667-1748) en 1718 propose la définition suivante : "*On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constante*."

  Il propose la notation : ΦxΦx.

7.2.7 . <u>La controverse des Logarithmes négatifs</u>. [DaDaPe]

Le logarithme est la première fonction transcendante c'est à dire qu'elle ne peut pas être obtenue par opérations algébriques.

Elle fut découverte par l'allemand STIFEL Michael (1487-1567), puis développée par l'écossais NAPPIER ou NEPER John (1550-1617) qui publie un manuscrit sur le sujet en 1614 puis 1619.

Le problème que se posent BERNOULLI Jean (1667-1748) et LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716), est la définition de ln(-1) et ln(i).

BERNOULLI considère que ces logarithmes étaient imaginaires et LEIBNIZ affirme que $\ln(-1)=0$ln(−1)=0.

C'est le mathématicien suisse EULER Leonhard (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) qui, en 1749, montre qu'il faut accepter le caractère multivoque du logarithme.

Ainsi par exemple :

Pour zz complexe et kk relatif :

$\ln z=\ln r+it+2k\pi i \quad \{\ln i=i\frac{\pi}{2}+2k\pi i \ \ln(-1)=i\pi+2k\pi i$ lnz=lnr+it+2kπi {lni=iπ2+2kπiln(−1)=iπ+2kπi

7.2.7 <u>La controverse des Logarithmes négatifs.</u> [DaDaPe]

Le logarithme est la première fonction transcendante c'est à dire qu'elle ne peut pas être obtenue par opérations algébriques.

Elle fut découverte par l'allemand STIFEL Michael (1487-1567), puis développée par l'écossais NAPPIER ou NEPER John (1550-1617) qui publie un manuscrit sur le sujet en 1614 puis 1619.

Le problème que se posent BERNOULLI Jean (1667-1748) et LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716), est la définition de ln(-1) et ln(i).

BERNOULLI considère que ces logarithmes étaient imaginaires et LEIBNIZ affirme que $\ln(-1)=0$.

C'est le mathématicien suisse EULER Leonhard (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) qui, en 1749, montre qu'il faut accepter le caractère multivoque du logarithme.

Ainsi par exemple :

- Pour z complexe et k relatif :

$$\ln z=\ln r+it+2k\pi i \quad \begin{cases}\ln i=i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\\ \ln(-1)=i\pi+2k\pi i\end{cases}$$

7.2.8 <u>La classification des fonctions par EULER Leonhard (1707 - 1783)</u>

Le mathématicien suisse EULER Leonhard (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) propose une 3ème définition pour la notion de fonction.

"Une fonction est une expression analytique composé d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes."

Dans Introductio in analysin infinitorum, Marcum-Michaelem Bousquet & socios, 1748.

Le mot analytique n'est pas précisé et pour EULER, une fonction est obtenue par une combinaison d'opérations et de modes de calculs connus de son époque et applicables aux nombres.

EULER fournit alors une classification des fonctions qu'il classe ainsi :

- Fonctions Algébriques : Obtenues par opérations algébriques (au sens large).
- Rationnelles : (4 opérations)
- Irrationnelles (4 opérations + extraction des racines)
- Fonctions transcendantes : trigonométriques, ln, exp, intégrales, puissances irrat. Obtenues par des opérations répétées à l'infini.

Cette classification ne permet pas de classifier les fonctions transcendantes avec rigueur. Il considère simplement qu'elles sont obtenues par une répétition infinie d'opérations. L'étude du développement des fonctions en séries infinies va mettre en défaut cette classification. Comme le souligne DIEUDONNÉ Jean (Lille 1906 - Paris 1992) dans [Dieudo]p257, les illustres mathématiciens de l'époque (comme Gauss) pensent que toute fonction est développable en série entière (sauf en des points isolés).

Puis, le mathématicien CAUCHY Augustin-Louis (1789-1857) donne dans son Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal (source : gallica.bnf.fr) son fameux contre-exemple, pour montrer que si la série de Taylor d'une fonction f converge au point x, elle n'est pas nécessairement égale à $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Cette fonction a toutes ses dérivées nulles en zéro et la série de Taylor, qui fait intervenir des zéros est identiquement nulle alors que ff ne l'est pas.

Les définitions précédentes de la notion de fonction ne sont pas assez générales, un changement de vue s'impose alors.

7.2.9 La notion la plus générale d'une fonction

Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), donne l'exemple, d'une nature nouvelle, d'une fonction discontinue en tous ses points.

Cette fonction est nommée fonction caractéristique des irrationnels. Elle prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon.

Ainsi, après FOURIER, CAUCHY, DIRICHLET, RIEMANN, on peut dire que la notion générale d'une fonction (univoque) conçue comme une correspondance arbitraire entre deux nombres est née. [DaDaPe] p229,230

8) La trigonométrie

Albert GIRARD (1595-1632) utilise les notations "sin, cos et tan" en 1626, dans Tables de sinus, tangentes et sécantes.

Mais c'est l'Allemand REGIOMONTANUS (15ème siècle) , qui est le créateur du mot sinus dans ses travaux sur la trigonométrie (De Triangulis omnimodus en 1464, publié en 1533)

9) Notations utilisées dans les calculs liés aux fonctions

- Dérivation : dx, f '(x), u', D_x y

  Les symboles dx, dy, and dx/dy sont introduits par Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) dans un manuscript de 1675.

  Les notations f '(x) pour la dérivée première, f ''(x) fpour la dérivée seconde, etc., sont introduites par Joseph Louis Lagrange (1736-1813). En 1797 dans Théorie des fonctions analytiques il utilisef'x et f''x. Mais dans Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries (1770) il utilise la notation Ψ'.

  En 1772, le mathématicien français LAGRANGE Joseph Louis (1736-1813) écrit u' = du/dx et du = u'dx dans "*Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'integration des quantités variables*".

  D_x y est introduit par Louis François Antoine ARBOGAST (1759-1803) dans "*De Calcul des dérivations et ses usages dans la théorie des suites et dans le calcul différentiel*," (1800). Il fut aussi utilisé par Jean BERNOULLI.

- **Dérivée partielle : ∂**

  Le symbole ∂ est utilisé en 1770 par CONDORCET Marie Jean Antoine Caritat de (1743-1794) dans "*Memoire sur les Equations aux différence partielles*," publié dans Histoire de L'Academie Royale des Sciences (1773).

  Cependant le ∂ fut pour la première fois utilisé par Adrien-Marie LEGENDRE (1752-1833) en 1786 dans "*Memoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le Calcul des Variations*".

LEGENDRE abandonne cette notation par la suite, elle est réintroduite par Carl Gustav Jacob JACOBI en 1841 dans De determinantibus Functionalibus" publié dans le Journal de Crelle en 1841.

Les fonctions de plusieurs variables sont expliquées par[8].

- **Le symbole intégral : ∫**

Leibniz écrivait omn. pour "omnia" avant le terme à intégrer.

Le symbole intégral : ∫ fut pour la première fois utilisé par le mathématicien Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) en, 1675, dans un traité non publié. Il plaça ensuite le symbole dx après l'intégrande.
En 1675, il en propose l'usage dans une lettre à Henry Oldenburg, secretaire de la Royal Society :
"Utile erit scribi ∫ pro omnia, ut ∫l = omn. l, id est summa ipsorum l"
Sa première apparition vient ensuite dans un papier de Leibniz, Acta Eruditorum.
Ce symbole vient d'une déformation du S de Summa.

- $\int_a^b$ Au début les bornes d'intégration sont indiquées par des mots. EULER est le premier à utiliser un symbole dans Institutiones calculi integralis, il place les bornes dans des parenthèses.

- Le symbolisme actuel est initié par Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), en 1822 dans *The Analytical Theory of Heat*.

- **La limite : lim**

  La notaion lim, est introduite par le suisse Simon-Antoine-Jean LHUILIER (1750-1840) en 1786 et par Karl Weierstrass (1815-1897) en 1841 dans un de ses papiers publiés en 1894 dans les Mathematische Werke. [HaSu] p 217 et [Cajo].

  $\lim\limits_{x \to \infty}$ La notation avec une flêche est introduite par Godfrey Harold Hardy (1877-1947) dans "A Course of Pure Mathematics, publié en 1908.

- **Le symbole infini : ∞**

Ce symbole ∞ est proposé par John Wallis (1616-1703) en 1655 dans De sectionibus conicis.

- **Les symboles grecs delta et epsilon : δ , ε**

En 1706, Jean BERNOULLI utilise δt pour désigner une différence (petite).
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) utilise ε en 1821 dans son Cours d'analyse, et parfois δ à sa place.

"δ viendrait de d de 'différence' et ε du e d'erreur selon certains spécialistes.

Il utilise ces symboles dans ces démonstrations comme nous le faisons actuellement.

10) Notations liées aux probabilités et statistiques

- **Factorielle : n!**

  Par Christian KRAMP (1760-1826) en 1808 dans Élémens d'arithmétique universelle (1808).

- **Permutations et combinaisons : $C_n^p = \binom{n}{p}$ et A_n^p**

La notation modernes avec parenthèses apparait en 1826 dans Die Combinatorische Analyse de l'allemand ETTINGSHAUSEN Andreas von (1796 - 1878) et dans Vorlesungen über höhere Mathematik, Vol. I.

Harvey GOODWIN (1818 - 1891) utilise nPp pour le nombre d'arrangements de p éléments parmis n en 1869 dans Elementary Course of Mathematics.

G. CHRYSTAL (1851 - 1911) utilise nCp pour le nombre de combinaisons de p éléments parmi n dans Algebra, Part II (1899), ouvrage que l'on peut consulter en ligne sur le site onlinebooks.

11) **Les ensembles de nombres**

- **IN : Origine du symbole IN, pour les entiers natiurels** (de naturale en italien)

  Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) définit l'ensemble des entiers naturels non nuls par des axiomes qui portent aujourd'hui son nom et le note N (Il deviendra ensuite IN pour désigner l'ensemble des nombres naturels). [HaSu] p276.

  CAJORI précise que :

  En 1895 dans Formulaire de mathématiques, PEANO utilise N pour les entiers positifs non nuls, n pour les entiers (relatifs) , N_0 pour les entiers positifs (avec 0), R pour les nombres rationnels positifs, r pour les nombres rationnels, Q pour les nombres réels positifs non nuls, q pour les nombres réels, et Q0 pour les nombres réels positifs (avec 0). [Cajo] vol. 2, page 299].

  L'expression nombre naturel apparaît vers 1675, à l'époque où les nombres négatifs sont enfin accéptés. [Hauch] p 132

- **ID : Origine du symbole ID, Ensemble des décimaux** : notation française du groupe BOURBAKI en 1970.

- **Q : Origine du symbole Q, Ensemble des nombres rationnels.**

  Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) aurait utilisé la lettre Q, première lettre de quotiente mais, selon plusieurs sources, pas pour désigner l'ensemble des rationnels. Cette notation viendrait en fait du groupe BOURBAKI dans Algèbre, Chapitre 1. (1969)

  Le mot rationnel apparaît en mathématiques vers 1550 (en même temps que le terme irrationnel). Un nombre irrationnel est aussi appelé à l'époque nombre sourd. Il semblerait que cela vienne d'une mauvaise traduction des mots rationnel et irrationnel en arabe à l'époque du célèbre mathématicien perse KHWARIZMI Mohammed Ibn musa AL (khiva 788 - Bagdad 850).

- **Z : Origine du symbole Z, Ensemble des nombres relatifs.**

  Cette notation viendrait en fait du groupe BOURBAKI dans Algèbre, Chapitre 1. (1969)

  La lettre viendrait de Zahl (nombre) et zahlen (compter) de l'allemand.

  DEDEKIND Julius Wilhelm Richard (1831-1916) et CANTOR Georg (1845-1918) sont souvent cités mais il semble que le premier utilisait K pour les entiers et J pour les complexes (selon les historiens Walter Felscher, Stacy Langton, Peter Flor, et A. J. Franco de Oliveira).

- **IR : Origine du symbole IR, Ensemble des nombres réels.** $\mathfrak{R}$

Les origines de l'utilisation de la lettre R puis IR pour désigner l'ensemble des réels sont multiples.

Contrairement à ce que l'on lit souvent, CAJORI affirme que DEDEKIND Julius Wilhelm Richard (1831-1916) utilise R pour les rationnels et le R gothique, $\mathfrak{R}$, pour les réels dans Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872).

- **C : Origine du symbole C, Ensembles des nombres complexes ou imaginaires.**

  L'origine du symbole C pour désigner l'ensemble des nombres complexes est assez récente. On trouve selon l'historien des mathématiques William C. Waterhouse (en 2001) ce symbole dans les papiers de JACOBSON Nathan (1910 - 1999), Structure and Automorphisms of Semi-Simple Lie Groups in the Large, (1939).

  La seconde édition de Survey of Modern Algebra (1953) de Birkhoff and MacLane, utilise aussi C (mais J pour les entiers, R pour les rationnels, $R^{\#}$ pour les réels).

  Le groupe BOURBAKI l'utilise aussi dans ses travaux de 1969 et participe à sa généralisation.

12) <u>Les matrices</u>

Voir la note 6 en fin de ce document.

13) <u>Notations ensemblistes et logiques</u> : ∈ ; ∩ ; ∪ ; ⊂ ; ⊃

- **Origine des symboles intersection et union : ∩ et ∪**
  Les symboles ∩ and ∪ sont utilisés pour la première fois par le mathématicien allemand GRASSMANN Hermann (1809-1877) dans Die Ausdehnungslehre von (1844) mais il les utilise comme symbole d'opération, pas nécessairement pour désigner l'union et l'intersection.
  Puis c'est le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) qui les utilise à cet usage en 1888 dans Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann ([Cajo] page 298).
- **Histoire du symbole "il existe" : ∃**
  C'est le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) qui utilise le symbole ∃
  dans Formulaire de mathematiqués, en 1897.
- **Histoire du symbole "appartient à" : ∊.**

  Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) utilise le symbole ε (epsilon) dans ses Arithmetices prinicipia nova methodo exposita, en 1889 et dans Formulaire de mathematiqués, en 1897, pour désigner l'appartenance à un ensemble. Cela viendrait en fait de la première lettre du mot grec qui signifie est.

- Le symbole ∈ pour désigner l'appartenance apparaitrait dans le traité du mathématicien anglais RUSSELL Bertrand Arthur William (1872-1970), Principles of Mathematics en 1903.
- **Histoire du symbole "pour tout ou quelque soit" : ∀.**
  CAJORI, insiste sur le fait que l'italien PEANO Giuseppe (1858-1932) utilise le symbole ∀(pour tout) avant l'anglais RUSSELL Bertrand Arthur William (1872-1970).

  RUSSELL utilisait la notation (x) signifiant "pour tout x".
- **Histoire du symbole "ensemble vide" : Ø**

  Ce symbole pour désigner l'ensemble vide apparait dans les travaux du

groupe BOURBAKI Éléments de mathématique Fasc.1: Les structures fondamentales de l'analyse; Liv.1: Théorie des ensembles. (Fascicule de resultants) (1939): "certaines propriétés... ne sont vraies pour aucun élément de E... la partie qu'elles définissent est appelée la partie vide de E, et designée par la notation $\emptyset$."
Le mathematicien français André WEIL (1906-1998), membre du groupe BOURBAKI, se dit responsable de l'introduction de ce symbole.

- **Histoire du symbole "équivaut à" : ↔ et ⇔**
  Le symbol ↔ pour désigner une équivalence logique apparait en 1936 dans le traité du mathématicien allemand Wilhelm Ackermann (1896 - 1962) Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre.
  La double flêche ⇔ est utilisée en 1954 par les BOURBAKI dans Theorie des ensembles, 3. edition, Paris, 1954.

Tableaux Synoptiques

17ème siècle.

Multiplication (Le point .)	William OUGHTRED (1574-1660, Angleterre), en 1631 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716, Allemagne), en 1698
infini ∞	John WALLIS (1616-1703, Angleterre)
a/b (quotient)	De MORGAN
π (Pi)	William OUGHTRED (1574-1660, Angleterre) pour désigner le périmètre d'un cercle mais c'est l'anglais William JONES qui utilise ce symbole pour la première fois en 1706 pour désigner le rapport du périmètre sur son diamètre. L'utilisation est développée par Euler. [HaSu] p185.
∫(intégrale)	LEIBNIZ (1646, 171)
dx (notation différentielle)	LEIBNIZ (1646, 1716)
< et >	Thomas HARRIOT (1560-1621, Angleterre), en 1630 et Albert GIRARD (1595-1632) (*)
point décimal, virgule décimale	STEVIN (1548-1620), SNELLIUS
sin, cos et tan	Albert GIRARD (1595-1632) (*)
÷	PELL John (1610 - Londres 1685) édite l'algèbre de RHONIUS (ou Johann Rahn (1622-1676), Teutsche Algebra, 1659) qui contient pour la première fois le symbole ÷ utilisé pas les anglo-Saxons pour la division. [HaSu] p279

18e siècle

a.b (produit scalaire)	WILSON (1741-1793)/GIBBS (1839-1903, USA)
e	Léonhard EULER (Bâle, 1707-1783)
f(x)	Léonhard EULER (Bâle, 1707-1783)
Le signe Σ	Léonhard EULER (Bâle, 1707-1783) (*)
f'(x) (dérivée)	LAGRANGE (1736-1813)
Les indices	Gabriel CRAMER (1704-1752, Suisse) en 1750 (les ',",''' suivis par ^{iv} , ^{v}, etc. deviennent usuels à la même époque) (*)

19e siècle

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ (déterminant)	CAUCHY (1789-1857)

$\overline{AB}$ = AB surligné pour désigner une mesure algébrique (segment orienté)	ARGAND (1768-1822, Suisse)
∂f/dx (dérivée partielle)	Adrien-Marie LE GENDRE (Paris 1752-1833)
n! (= 1x 2x 3x ... xn , factorielle)	KRAMP (1760-1826)

20e siècle

a ^ b (produit vectoriel)	BURALI-FORTI (1861-1931,Italie) / MARCOLONGO. Aux USA la croix (x) instituée par GIBBS (1839-1903, USA) ou les crochets [u,v] sont plutôt utilisés.
∁(complémentaire)	BOURBAKI (20e siècle)
(⟹ implication logique,)	BOURBAKI (20e siècle)
|| x || (norme)	Fréchet (1878-1973)
f : A ↦ B	Fréchet (1878-1973)
∃ (il existe)	PEANO (1858-1932)/ FREGE
A - B (différence symétrique), ∈ ,∩,∪,⊂	PEANO (1858-1932)
(quel que soit) : ∀	HILBERT (1862-1943)
$\vec{F}$, $\overrightarrow{AB}$= flèche surlignée pour désigner un vecteur	France, dans les années 1930. Voir aussi STEVIN.

Ouvrage de référence

Ouvrages traitant d'histoire des mathématiques

[Audi] : J.L.AUDIRAC, Vie et œuvre des grands mathématiciens, Magnard, Paris, 1990.

[Baudet] : Jean BAUDET, Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques, Vuibert, Paris, 2002.

[Bourb] : Nicolas Bourbaki, Éléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris, nouvelle édition 1974.

[Cajo] : Florian CAJORI, History of mathematicals notations, Thèse de réf. 01-1 CAT.74.

[CajoV1] : Florian CAJORI, History of mathematicals notations, Volume 1, Cosimo, New York, 2007 (rééd. de l'édition de 1929).

[CajoV2] : Florian CAJORI, History of mathematicals notations, Volume 2, Cosimo, New York, 2007 (rééd. de l'édition de 1929).

[DaDaPe] : A.DAHAN-DALMEDICO/J.PEIFFER, Une histoire des mathématiques, Seuil, Paris, 1986.

[DegHEC] : C. et D. DEGRAVE, Précis de Mathématiques : HEC option scientifique et économique, Bréal, Rosny, 2000.

[Delah1] : Jean-Paul DELAHAYE, Merveilleux nombres premiers, Belin - Pour la science, Paris, 2000.

[Delah2] : Jean-Paul DELAHAYE, Le fascinant nombre pi, Belin - Pour la science, Paris, 1997.

[Dieudo] : Jean DIEUDONNÉ, Abrégé d'histoire des mathématiques, Hermann Editeurs, Paris, nouvelle édition 1986.

[Dugac] : Pierre DUGAC, Histoire de l'analyse, Vuibert, Paris, 2003.

[Euclide] : « Les œuvres d'Euclide », traduit littéralement par F. Peyrard, nouveau tirage de mars 1993, Librairie scientifique et technique, Paris, 1993.

[Gueridon] : **Jean GUERIDON**, Guide d'histoire des mathématiques, Ellipses, Paris, 2002.

[Guedj1] : Denis GUEDJ, Le théorème du perroquet, Seuil

[Guedj2] : Denis GUEDJ, L'empire des nombres, Découvertes Gallimard, Sciences.

[HaSu] : B. Hauchecorne et D. Surateau, Des mathématiciens de A à Z, Ellipse, Paris, 1996.

[Hauch] : B. Hauchecorne, Les mots et les maths, Ellipse, Paris, 2003.

[Histo] : Histoire des maths - Maths pour tous, vol.1 - ACL éditions .

[Ifrah] : Georges Ifrah, Les chiffres, Robert Laffont.

[Kiyosi] : Kiyosi Yabuuti, Une histoire des mathématiques chinoises, Belin - Pour la science, Paris, 2000.

[Rey] : **Alain REY** (Dictionnaire historique de la langue française) - Le Robert -, Paris, 2000.

[Singh] : Simon Singh, Le dernier théorème de Fermat, JC Jattès.

[Smith1] : Smith, David Eugene (1860-1944). History of Mathematics, vol. I. New York: Dover Publications, Inc., 1958.

[Smith2] : Smith, David Eugene. History of Mathematics, vol. II. Boston: Ginn and Co., 1925.

[TanHs10] : **Tangente**, Mille ans d'histoire des mathématiques, HS n°10, Pole, Paris, 2005.

[TanHs30] : **Tangente**, Histoire des mathématiques de l'Antiquité à l'an Mil, HS n°30, Pole, Paris, 2007.

[Universalis] : Dictionnaire des mathématiques, Encyclopédia Universalis, Albin michel - Paris, 199

Notes :

[1] **Les symboles du plus et du moins** :

Dans un papyrus égyptien, on découvre une paire de jambes marchant dans un sens pour indiquer une addition et dans l'autre sens pour une soustraction.
Jusqu'au 15ème siècle, l'usage le plus courant consistait à écrire en toutes lettres "j'ajoute" ou "je soustrais".
A la fin du 15ème siècle, les mathématiciens italiens utilisent les lettres p pour "piu" et m pour "minus" souvent surmontées du signe " ~ ".
C'est à cette époque, en 1489, qu'apparaissent les premiers + et - dans un ouvrage d'arithmétique commerciale de l'allemand WIDMAN (+ serait une déformation de &).
Par suite, l'usage de ces symboles ne se généralisèrent qu'avec "l'Arithmética intégra" (1554) du mathématicien allemand STIFEL (1487-1567).
En France, c'est le mathématicien François VIETE (1540-1603) (dont l'idée fondamentale est l'utilisation systématique du calcul littéral), qui contribue grandement à imposer ces signes.

[2] **Le symbole de la multiplication :**

Pendant longtemps, on a exprimé par des mots l'intention de multiplier deux nombres.

Puis sont apparues des abréviations comme la lettre M utilisée en 1634 par le flamand Simon Stevin (Bruges 1548 - La Haye 1620) notamment dans un ouvrage de 1585, écrit en français et intitulé "*La disme*".

François Viète (1540-1603) quant à lui utilisait la notation A in B pour désigner A×B. (Les données connues sont représentées par des consonnes, les inconnues par des voyelles).

Le symbole × fut introduit plus tardivement, en 1631, par le mathématicien anglais W. Oughtred (1574-1660) dans Clavis Mathematicae (clés des Mathématiques), composés vers 1628 et publié à Londres en 1631.

Ce nouveau symbole se généralisa assez difficilement au début, il faut dire qu'évidemment les moyens de communications étaient sommaires.

W. Oughtred fut par ailleurs le premier à utiliser des abréviations pour les fonctions trigonométriques et on lui prête l'invention des échelles logarithmiques.

Quant au point, il n'apparait qu'en 1698 dans un ouvrage de l'allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1er juillet 1646 - Hanovre, 1716).

Cependant il apparaît aussi chez Thomas Harriot (1560-1621) dans Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas, (publié après sa mort en 1631), et chez Thomas Gibson en 1655 in Syntaxis mathematica. Les spécialistes mettent toutefois en doute leur utilisation en tant que symbole opératoire. [Cajo]

Autre exemple

Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 1623 - Paris, 1662) dans "DE NUMERIS MULTIPLICIBUS" (traité sur les caractères de divisibilité des nombres) écrit :

> "Si vero constet duobus characteribus NM :
> Dico quoque, prout M, +N in B multiples A, et ipsum numerum NM ejusdem multiplicem esse."

soit

> "Soit maintenant un nombre de deux chiffres représentés par NM ; je dis que, pour qu'il soit divisible par A, il faut et il suffit que la somme M + N×10 le soit").

Ce qui est bien sur vrai en base 10.

[3] **La division :**
Les symboles du plus et du moins. De nombreux symboles ont été utilisés pour représenter cette opération.

Une longue évolution

- **Parenthèse.**
  L'écriture 8) 24 a été employé par Michael STIFEL (1487-1567 ou 1486-1567) dans l'*integra d'Arithmetica*, éditée en 1544 à Nuremberg. (**[CajoV1]**, page 269)

- **Les deux points (:)**

Il a été employé en 1633 dans un texte, "*Johnson Arithmetik"* (Londres, 1633).

Cependant Johnson a seulement employé le symbole pour indiquer des fractions. Par exemple des trois-quarts ont été écrits 3:4
Il n'a pas employé le symbole pour la division « dissociée de l'idée d'une fraction ». (**[CajoV1]**, page 276,295)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a employé : pour le rapport et la division en 1684 dans l'*eruditorum d'acta*.

- **Le symbole (÷)[CajoV2] p211**
  Il a été employé la première fois comme symbole de division par le mathématicien suisse Johann RAHN (ou Rhonius) (1622-1676) en 1659 dans l'*algèbre de Teutsche*.
  Le livre de RAHN a été traduit en anglais et édité, avec des additions par John PELL, à Londres en 1668. Dans cette édition, on y retrouve le symbole de la division.
  Selon quelques sources récentes, John PELL avait une influence importante sur RAHN et il pourrait en fait, être responsable de l'invention du symbole.
  Cependant, selon l'historien Cajori il n'y a aucune preuve de cette assertion.

  Notons de plus que ce symbole **÷** de division fut employé par beaucoup d'auteurs avant RAHN comme signe moins.

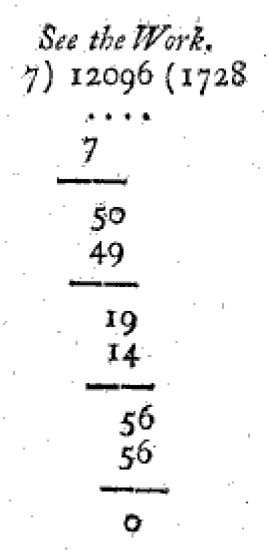
- **Symbolisme récent.**

  Au 19ème siècle, la division est typiquement exprimée avec le diviseur, le dividende, et le quotient sur la même ligne, séparée par des parenthèses.

- **Par exemple : 36) 116 (3**

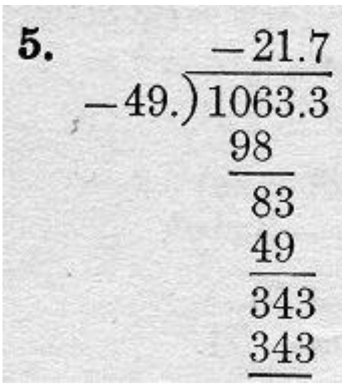
qui indique la division de 116 par 36 soit en notation euclidienne : 116 = 3×36 + 8 (le reste n'est pas indiqué)

- **Autre exemple** : *Arithmetick* par John HILL (1772)



Dans *Arithmetick* par John Hill (1772)

- **En 1888**, dans l'édition du professeur des *éléments de l'algèbre* de G.A. WENTWORTH, la barre horizontale est presque attachée au-dessus de la parenthèse et le quotient est écrit au-dessus de la barre, comme montré ci-dessous.



Des éléments d'algèbre, 1888

4 Les exposants

Définitions :

Un nombre réel a élevé à la puissance n (pour n entier non nul) est défini par a^n = a×a×a×..×a (n fois).

- Par exemple :
  -
    - $3^2 = 3.3 = 9$

- et $2^3 = 2.2.2 = 8$

Par convention on a $x^0 = 1$ alors que 0^0 n'est pas défini.
On peut généraliser cette définition pour n réel et x > 0 à l'aide de la fonction exponentielle : $x^n = e^{n.\ln x}$.

Histoire :

- Le mathématicien français ORESME Nicolas (Oresme, près de Bayeux 1325 - Lisieux 1382) introduit les exposants fractionnaires et la règle de calcul $(x^p)^q = x^{pq}$.

  Il essaie de définir un exposant irrationnel, par exemple $\sqrt{2}$, sans véritable succès. [HaSu] p266

- Nicolas CHUQUET (15e siècle) pratiquait déjà dans "*triparty en la science des nombres*" (1484), le plus ancien traité d'algèbre écrit en français, la notation par exposant (y compris les puissances de 0 et les puissances négatives).

  Il n'a cependant jamais publié "*Triparty*", ce qui explique le peu d'influence de son ouvrage.

  Dans cet ouvrage, la notation des puissances par exposant est très proche de la nôtre et les radicaux sont notés R.

- Pour les **puissances de l'inconnue**, $1225+148\,x^2$ est écrit $1225p148^2$ par Chuquet.

- Le symbole R est devenu r puis √ (pour éviter une ambiguïté sur le radicande) mais cette notation n'apparait qu'au 16ème siècle avec le mathématicien allemand Christoff Rudolf (1500 - 1545) dans son ouvrage *Die Coss* (1525).

- **Le terme exposant** est dû au mathématicien allemand Stifel (1487-1567) qui généralise la notation correspondante aux exposants négatifs. L'auteur de l'Arithmética intégra était un moine, disciple de Luther, qui calcula la fin du monde pour le 18 octobre 1533. Il enseigna à Königsberg et Iéna.

- Au 18ème siècle, on écrit encore bb pour b^2 mais b^3, b^4.... , même si Descartes (1596-1650) a une écriture des formules très proche de la nôtre.(z2 pour z^2).

[5] **Le symbole racine carrée** : √

R C'est la première utilisation d'un symbole pour représenter la racine carrée. On la trouve dans un ouvrage de Leonardo de Pise, geometriae de Practica en 1220.

Nicolas Chuquet (15e siècle) pratiquait déjà dans "triparty en la science des nombres" (1484) (le plus ancien traité d'algèbre écrit en français) la notation par exposant.

Pour noter par exemple $\sqrt{35 - \sqrt{15}}$ Nicolas Chuquet écrit : RU 35 m˜ R 15, où R désigne la racine carrée, le U de RU signifiant qu'il s'agit d'une racine carrée englobant tout ce qui suit. [HaSu] Dans cet ouvrage, la notation des puissances par exposant est très proche de la nôtre et les radicaux sont notés R.

Le symbole radical est apparu la première fois en 1525 dans la matrice Coss par Christoff Rudolff (1499-1545). Il a employé √ pour les racines carrées. Il auteur du premier manuel d'algèbre en langue allemande. Ce dernier s'inspira de son compatriote Riese (1492?-1559) qui préconisait le calcul à la plume de préférence au calcul avec jetons.

Certains avancent que l'origine du symbole radical moderne vient d'une déformation de R, puis r, la première lettre dans la radix.

C'est l'opinion de Leonhard Euler dans ses differentialis de calculi d'Institutiones (1775). Cependant, Florian Cajori, auteur d'une histoire des notations mathématiques, n'en est pas convaincu.

En 1637 DESCARTES utilise √, ajoutant la barre en haut, dans sa Geometrie.

8. Notations cossiques

Christoph Rudolff introduit en 1525 la notation √ pour la racine carrée, √√√ pour la racine cubique et √√ pour la racine quatrième.

M. Stifel adopte √z pour désigner $\sqrt{\ }$, puis plus tard il écrit $\sqrt{\ }$

√& pour désigner $\sqrt[3]{\ }$

√zz pour désigner $\sqrt[4]{\ }$

Il écrit AA pour x^2

AAA pour x^3.

Pendant la Rennaissance, l'école allemande, qui prend le nom de La Coss(*), va s'efforcer d'élaborer une notation commode et introduit des abréviations de rex, de radix, de causa (nom de l'inconnue au Moyen Age chrétien), de census (carré de l'inconnue), etc., dans les formules ; ce que l'on appelle les caractères cossiques.

(*) Les termes utilisés pour désigner l'inconnue par les Arabes signifient chose et racine (cosa, en italien ; coss, en allemand).

Albert Girard (1595-1632) introduit la notation racine cubique ^{3}√ .

Selon Cajori (vol. 1, page 372) la première personne pour qui adopte la notation de Girard était Michel Rolle (1652-1719) en 1690 dans le d Algébre de Traité.

Voici un autre exemple de notations utilisées par Gérolamo CARDAN (Pavie, 1501 - Rome, 1576), tiré de son ouvrage Ars Magna (1545).

9. Notation de Cardan (Ars magna)

Cardan écrit l'égalité :

$$(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

sous la forme :

5 p : Rm : 15,

5 m : Rm : 15,

25 m : m : 15qd est 40.

Il note $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ sous la forme R.V.7p : R14.

Le signe V indique que tout ce qui suit est sous le signe radical.

6 Histoire de la notion de matrices et des déterminants.

La notion de matrice apparaît progressivement, après la notion de déterminant en fait. Il faut attendre que la théorie des espaces vectoriels se développe pour que la notion de matrice actuellement utilisée (comme application linéaire) fasse surface.

Définition actuelle.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes, et à éléments (ou coefficients) dans IK toute application de {1,...,n} × {1,...,p} dans IK.

Une application A : {1,...,n} × {1,...,p} → IK est noté sous la forme : A = (aij) 1≤ i ≤n , 1≤ j ≤p

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $M_{n,p}$(IK) l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, et à éléments (ou coefficients) dans IK .

Matrice et application linéaire.

Soit E un IK-ev de dimension p, et de base B = (e1,...,ep).
Soit F un IK-ev de dimension n, et de base C = (f1,...,fn).
Soit f une application linéaire de E dans F, on note f ∈L(E;F)
Pour 1 ≤ j ≤ p ; on note (aij,...,anj) les composantes de f(ej) dans la base C : f(ej) = ∑aij.fi (pour i de 1 à n)
On appelle matrice de f relativement aux bases B et C, notée $\mathrm{Mat}_{B,C}$ (f) , la matrice de $M_{n,p}$(IK) définie par : $\mathrm{Mat}_{B,C}$(f) = (aij)

Histoire de la notion de matrice

a- Les travaux de LEIBNIZ (1646-1716) en 1683.

Les concepts de déterminants et de matrice sont historiquement très liés. Ils proviennent en fait de l'étude durant le 18ème siècle des systèmes d'équations linéaires.
Dès 1678, le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) les aborde et utilise la notation avec indices dans le cas d'un système de 3 équations à 2 inconnues.
L'historien Jean BAUDET ([Baudet] p 195) précise que c'est dans un texte de 1683 (ayant peu d'influence sur la communauté scientifique) que LEIBNIZ aborde le sujet.

LEIBNIZ fait la remarque suivante : Le système 3×2 (3 équations, 2 inconnues) : $\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$
est tel que : 10×21×32 + 20×31×12 + 30×11×22 = 30×21×12 + 10×31×22 + 20×11×32.
Il précise que cette égalité est la condition de possibilité de résolution du système.
Remarque : Ceci correspond en fait au développement du déterminant 3×3 avec la règle dite de SARRUS. Le calcul d'un déterminant 3×3 donne avec la règle de SARRUS : Det (A) = diagonales descendantes - diagonales montantes = 0

$$\begin{array}{ccc} 10 & 11 & \boxed{12} \\ 20 & \boxed{21} & 22 \\ \boxed{30} & 31 & \boxed{32} \\ 10 & \boxed{11} & 12 \\ \boxed{20} & 21 & 22 \\ 30 & 31 & 32 \end{array}$$

Cette découverte de LEIBNIZ a peu de conséquences et le mathématicien suisse, CRAMER Gabriel (1704-1752) découvre sa méthode de résolution dans des papiers de 1774. Ses travaux sont poursuivis par les français VANDERMONDE Alexandre Théophile (1735-1796), puis LAPLACE Pierre Simon, marquis de (1749-1827) qui ont l'idée de définir un déterminant d'ordre n par récurrence sur n en le développant par rapport à une ligne ou une colonne.

b- GAUSS Carl Friedrich (1777-1855) et les transformations linéaires.

Les transformations linéaires sont étudiées sous le nom de substitutions linéaires par le mathématicien français LAGRANGE Joseph Louis (1736-1813) (pour les formes quadratiques à 2 variables) et le mathématicien allemand GAUSS Carl Friedrich (1777-1855) (pour les formes quadratiques à 3 variables).
GAUSS aborde la théorie des formes dites ternaires et pour représenter la substitution linéaire qui remplace (x ; y ; z) par (ax+by+cz ; a'x+b'y+c'z ; a''x+b''y+c''z) il utilise pour la première fois une notation en tableau proche de la notation matricielle. Il l'abrège d'ailleurs en une seule lettre S.

$$S = \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \text{ soit avec la notation actuelle } \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{matrix} d & e & f \\ d' & e' & f' \\ d'' & e'' & f'' \end{matrix}$$

Il note alors explicitement que si l'on fait successivement la substitution S, et la substitution T, le résultat est identique si l'on avait fait la substitution, notée pour nous SxT mais qu'il ne note pas ainsi (il faudra attendre les travaux de l'allemand EISENSTEIN Ferdinand Gotthold Max (1823-1852) en 1844 pour cela, voir 5°))

$$\begin{matrix} ad + bd' + cd'' & ae + be' + ce'' & af + bf' + cf'' \\ a'd + b'd' + c'd' & a'e + b'e' + c'e'' & a'f + b'f' + c'f'' \\ a''d + b''d' + c''d' & a''e + b''e' + c''e'' & a''f + b''f' + c''f'' \end{matrix}$$

Il évoque donc sans la nommer, la multiplication de deux matrices carrées 3x3, et il est probable que c'est ce passage de GAUSS qui influencera CAUCHY (1789-1857) pour sa définition de la multiplication de deux matrices.

c- CAUCHY (1789-1857) et les formes quadratiques en 1826.

Pour préparer son enseignement à l'école polytechnique, le mathématicien français CAUCHY Augustin-Louis (1789-1857) reprend, en 1826, le problème de réduction d'une quadrique à ses axes.
[DaDaPe] précise la problématique de CAUCHY.
CAUCHY étudie une quadrique (surface du second degré) dont le centre est pris comme origine.
Cette quadrique est d'équation : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = K$.
Cherchant à en déterminer les axes principaux, il obtient une équation exprimant qu'un certain déterminant Δ est nul.

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} A - s & F & E \\ F & B - s & D \\ E & D & C - s \end{vmatrix}$$

Ce Δ constitue le **polynôme caractéristique** de la matrice de la forme bilinéaire associée à la forme quadratique.
Il démontre que les racines de ce polynôme (i. e. les valeurs propres de la matrice) sont réelles. Puis il montre que ce polynôme est indépendant de tout changement d'axes rectangulaires (i.e. les transformations semblables ont même valeurs propres).
Haut de page

d- Opérations sur les matrices : EISENSTEIN Ferdinand Gotthold Max (1823-1852) en 1844 :

Dés ses premiers travaux sur la théorie des nombres en 1844, le mathématicien allemand EISENSTEIN Ferdinand Gotthold Max (1823-1852) s'approprie et utilise le symbolisme en tableau de son compatriote GAUSS Carl Friedrich (1777-1855).

La notation produit de deux matrices :

Il va cependant plus loin puisqu'il note la composée des deux substitutions citées ci-dessus par le symbole commode SxT. Par exemple la composée des substitutions S et T est notée SxT.

$$S = \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \text{ soit avec la notation actuelle } \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{matrix} d & e & f \\ d' & e' & f' \\ d'' & e'' & f'' \end{matrix}$$

$$S \times T = \begin{matrix} ad + bd' + cd'' & ae + be' + ce'' & af + bf' + cf'' \\ a'd + b'd' + c'd' & a'e + b'e' + c'e'' & a'f + b'f' + c'f'' \\ a''d + b''d' + c''d' & a''e + b''e' + c''e'' & a''f + b''f' + c''f'' \end{matrix}$$

Il précise que l'on peut généraliser ces notions et notations à un nombre quelconque de variables. En outre il indique qu'il faut distinguer SxT et TxS, la non commutativité du produit matricielle est donc bien acquise.

Le mathématicien BINET Jacques Philippe Marie (1786-1856) établit, sans le justifier correctement, l'expression du terme général du produit de deux matrices.

L'inverse d'une matrice :

Puis EISENSTEIN (1823-1852) introduit la notation 1/S quand S a un déterminant non nul (la notion d'inverse de matrice).

L'addition de matrices :
Dans un papier de 1850, il indique que l'on peut additionner les substitutions linéaires mais il n'utilise pas cette notion (et ne donne aucune notation associée).
Ferdinand EISENSTEIN (1823-1852) a donc pratiquement défini le concept de matrice carrée, d'ailleurs le mathématicien français HERMITE Charles (1822-1901) utilise à la même époque, dans ses travaux sur la Théorie des nombres et des fonctions abéliennes, le même symbolisme.

e- Naissance du concept de matrice en 1858: CAYLEY et SYLVESTER :

On considère souvent le mathématicien anglais CAYLEY Arthur (Richmond 1821- Cambridge 1895) comme l'inventeur des matrices.
Lorsqu'il les introduit, le déterminant existe déjà, noté en tableau depuis 1815 à l'initiative de CAUCHY Augustin-Louis (1789-1857).
CAYLEY et SYLVESTER James Joseph (1814-1897) travaillent en collaboration pendant près de 30 ans (en algèbre).
Le terme de matrice.
Le terme de matrice est introduit par SYLVESTER en 1850 pour désigner un tableau rectangulaire de nombres (qu'il ne pouvait pas appeler déterminant) .
Les matrices, une entité distincte des nombres.
Mais c'est avec la publication par CAYLEY, en 1858, d'un article des Philosophical Transactions (Londres) : A memoir on the Theory of Matrices, que la notion de matrice prend tout son sens.
Les matrices deviennent alors une entité distinctes du déterminant et sont étudiées comme telle.
Les résultats de HAMILTON William Rowan (1805-1865) sur les quaternions incitent CAYLEY à discuter des propriétés caractéristiques des opérations sur les matrices (associativité, addition, condition de commutativité de la multiplication). Il traite également le cas des matrices rectangulaires et des cas ou leur produit est possible.
Il considère qu'une matrice n'est qu'une notation abrégée pour une substitution linéaire (comme pour GAUSS).
Il construit ainsi formellement de nouvelles entités (qui ne sont pas des nombres) et qui ont des propriétés particulières.
CAYLEY se contente dans un premier temps d'étudier les matrices (2,2) et (3,3), mais affirme que tout cela s'étend aux matrices rectangulaires d'ordre (p, n). Il définit la somme et le produit de deux matrices, la transposée, donne l'inverse d'une matrice (3,3) à l'aide des cofacteurs et introduit les matrices symétriques et antisymétriques.

Equation et polynôme caractéristiques :
CAYLEY introduit l'équation caractéristique d'une matrice, énonce ce que nous appelons maintenant le théorème de Cayley-Hamilton.
Dans ce théorème, il exprime le fait qu'une matrice carrée A vérifie l'équation polynomiale $X(A) = 0$ ou $X(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$ est le polynôme caractéristique de A. Il ne démontre ce théorème que pour n=2 et n=3.
Il semble toutefois que ce travail soit resté dans l'ombre jusqu'à 1880, tout comme celui de LAGUERRE Edmond Nicolas (1834-1886) de 1867 qui propose une théorie des matrices similaire à celle de CAYLEY.

f - Les notations utilisées pour désigner une matrice :
Les notations utilisées.
L'historien des sciences CAJORI, spécialisé dans l'histoire des symboles mathématiques, présice que les notations de CAYLEY en 1858, dans son article des Philosophical Transactions (Londres) : A memoir on the Theory of Matrices, sont les suivantes [Cajo] :

$$\begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; a\;,\quad b\;,\quad c\;)} \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}$$

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz\,, \\ Y &= a'x + b'y + c'z\,, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$(X,\ Y,\ Z) = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; a\;,\quad b\;,\quad c\;)} \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} (x,\ y,\ z),$$

Puis, par exemple, le mathématicien américain WEDDERBURN Joseph Henry Maclagan (1882-1948) dans Lectures on Matrices (1934) utilise les notations en double barres.

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

Complément : les matrices particulières après 1850.

En algèbre au 18ème siècle, l'objectif principal des mathématiciens est la recherche de transformations linéaires permettant de ramener des <u>formes quadratiques</u> ($\sum aii\ xi^2 + \sum aii\ aij.xi.xj$, pour $1 \leq i < j \leq n$) à 2 ou 3 variables à des types simples.

On cherche donc à classes ces formes quadratiques par des invariants caractérisant ces formes réduites.
EULER Leonhard (1707- 1783) obtient en géométrie sa classification des quadriques, et LAGRANGE et GAUSS développe leur théorie des formes binaires en arithmétique ($ax^2 + bxy + cy^2 = n$, avec a,b,c,n, x et y entiers).
A partir de 1850, commence la recherche, pour les formes bilinéaires, des invariants par substitutions linéaires ayant des matrices inversibles U, V.
On considère des formes de type : $\sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} . x_i . x_j$ que l'on écrit sous forme matricielle ${}^t x . A . y$
Une substitution linéaire s'écrit en termes de matrices : x = U . x' et y = V . y' avec U ,V des matrices carrées d'ordres m, n.

Plusieurs cas sont étudiés alors :

- **Si A matrice carrée symétrique réelle** :

  C'est le premier problème étudié dont le problème de réduction est celui d'une forme quadratique C.L. de carrés avec des coefficents ± 1. Parallèlement, le mathématicien allemand JACOBI Carl Gustav Jacob (1804-1851) et l'anglais SYLVESTER James Joseph (1814-1897) prouvent vers 1850 que le nombre de coefficients +1 et -1 sont toujours les même pour toutes les formes réduites. C'est ce que l'on nomme maintenant le théorème ou loi d'inertie de SYLVESTER.

- **Si A matrice carrée hermitienne** (^tA = conj(A))

  En 1855, le français HERMITE Charles (1822-1901), au cours de ses recherches arithmétiques, introduit les formes dites hermitiennes, pour lesquelles la loi d'inertie de SYLVESTER se généralise.

Ces différentes études permettront l'introduction d'autres matrices, sans trop entrer dans les détails on voit aussi apparaître :

- **Les matrices orthogonales :**
  En 1854, le mathématicien français HERMITE Charles (1822-1901) introduit les matrices orthogonales et montre que les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles.

C'est entre 1877 et 1880 que le mathématicien allemand FROBENIUS Ferdinand Georg (1849-1917), avec plusieurs mémoires publiés entre 1877 et 1878, joue le rôle de législateur dans la théorie des matrices. Il reprend plusieurs résultats de ses prédécesseurs, les développe et les complète.

[7] Signe d'égalité :
Le signe d'égalite = a été proposé dès 1557 par le mathématicien et physicien galois Robert RECORDE (1510 ?-1558) dans "Clavis mathematicae" (The Whetstone of Witte).

Cet ouvrage est la seconde partie de son " Arithmétique". Il y traite en particulier d'extraction de racines carrées, de résolutions d'équations et de nombres irrationels (surds nuumbers).

Peu de temps après la parution de son ouvrage, il est jeté en prison à Londres (à la King's Bench Prison) suite à une accumulation de dettes, il y meurt quelques mois plus tard.

noide the tedioufe repetition of thefe woordes : is equalle to : I will fette as I doe often in woorke vſe, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══, bicauſe noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke theſe nombers.

1. 14.ꝛe.—+—.15.ϑ═══71.ϑ.
2. 20.ꝛe.——.18.ϑ═══.102.ϑ.
3. 26.ʒ.—+—10ꝛe═══9.ʒ.—10ꝛe—+—213.ϑ.
4. 19.ꝛe—+—192.ϑ═══10ʒ—+—108ϑ—19ꝛe.
5. 18.ꝛe—+—24.ϑ.═══8.ʒ.—+—2.ꝛe.
6. 34ʒ.——12ꝛe═══40ꝛe—+—480ϑ—9.ʒ.

1. In the firſte there appeareth. 2. nombers, that is 14.ꝛe.

R.Recorde (1557)

Recorde, expliquait ainsi les raisons de son choix :

"Si j'ai choisi une paire de parallèles, c'est parce qu'elles sont deux lignes jumelles, et que rien n'est plus pareil que deux jumeaux."

La généralisation de ce signe fût cependant très lente. On attribue au mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716), la généralisation de son utilisation.

Dans le document ci-joint, nous pouvons constater que René DESCARTES (1596-1650), 80 ans après la mort de RECORDE, utilisait un autre signe pour indiquer l'égalité.

DES ÆQUATIONS.

Quand on veut reſoudre quelque probleme, on poſe pour les termes cognus (ſoit ligne, nombre, ſuperficie, ou corps) les premieres lettres de l'alphabet, *a*, *b*, *c*; & pour les incognus, on ſe ſert des dernieres, *x*, *y*, *z*; & faiſant vn regiſtre, on ſe ſert de ce signe ∝, pour denotter l'égalité de deux choſes : comme, pour dire la ligne AB eſt égale à *b*, i'eſcris AB ∝ *b*; obſeruant toutesfois, en ſes[b] ſuppoſitions, à garder le nombre de dimenſions : poſant vne lettre pour vne ligne ou nombre, deux lettres pour vne ſuperficie, & trois pour vn corps; de ſorte qu'il faut qu'il y ayt autant de dimenſions en vn terme qu'en l'autre, ſinon que l'vnité ſoit determinée en la queſtion. Car, comme l'vnité ne diminuë le nombre des dimenſions par la diuiſion, ny ne l'augmente auſſy par la multiplication, il eſt loiſible de l'oſter des termes où elle ſe trouue, comme on voit en la *Geometrie*, page 299[c], en l'exemple allegué auſſy à cet effet : $a^2b^2 - b$, où ſoit *c* l'vnité, & $-b$ multipliée deux fois par l'vnité, & a^2b^2 diuiſée vne fois par l'vnité; en la reſtituant, on aura en vn terme autant de dimenſions qu'en l'autre, $\frac{a^2b^2}{c} - bc^2$.

Pareillement, page 395[d], en l'equation $z^4 \propto pz^2 - qz + r$, l'on

a. d^2x^2] dbx^2 MS.
b. MS. : *ſes* (*sic*). Lire peut-être *ces* ?
c. Tome VI, p. 371-372.
d. *Ibid.*, p. 469.

[8] **Histoire des fonctions à plusieurs variables, des dérivées partielles et calcul différentiel :**

<u>Introduction :</u>

L'étude des fonctions de plusieurs variables commence au 18e siècle mais ses fondements solides ne sont posés qu'au début du 20e siècle.

La notion de dérivée partielle est connue à la fin du 17e siècle, mais les premières équations aux dérivées partielles n'apparaissent qu'à partir de 1740 dans des problèmes de mécaniques.

1. Les dérivées partielles premières.

Deux mathématiciens sont considérés comme les pères des dérivées partielles. Tout d'abord, le français CLAIRAUT Alexis-Claude (1713-1765) en 1747, puis le suisse EULER Leonhard (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) dans son traité Institutiones calculi differentialis de 1755. Ils étudient ce que l'on nomme maintenant, la différentielle totale pour des fonctions de deux variables réelles :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

Notation : [Cajo]

Le symbole ∂ est utilisé en 1770 par CONDORCET Marie Jean Antoine Caritat de (1743-1794) dans "Memoire sur les Equations aux différence partielles," publié dans Histoire de L'Academie Royale des Sciences (1773).

Cependant le ∂ fut pour la première fois utilisé par Adrien-Marie LEGENDRE (1752-1833) en 1786 dans "Memoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le Calcul des Variations.

LEGENDRE abandonne cette notation par la suite, elle est réintroduite et vulgarisée par Carl Gustav Jacob JACOBI en 1841 dans De determinantibus Functionalibus" publié dans le Journal de Crelle en 1841.

CLAIRAUT (1713-1765) et EULER Leonhard (1707 - 1783) constatent que la différentielle totale de f prend la même forme si l'on exprime df à l'aide de x,y,dx et dy ou par changement de variables, avec X, Y, dX et dY. On a en effet les relations :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial X}(X,Y)dX + \frac{\partial x}{\partial Y}(X,Y)dY$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial X}(X,Y)dX + \frac{\partial y}{\partial Y}(X,Y)dY$$

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre ne sont étudiée de façon générale que vers 1770. EULER montre qu'une famille de fonctions z = f(x,y,a,b) vérifie une telle équation. [Dieudo] p 43

2. Les dérivées partielles secondes.

Au 18e siècle, les mathématiciens doivent apprendre à maitriser des équations d'ordre supérieur lorsqu'ils se consacrent aux problèmes de la Mécanique des corps déformables, de la théorie de l'élasticité et de l'hydrodynamique.

Les dérivées partielles secondes apparaissent notament lors de la fameuse étude de l'équation aux cordes vibrantes qui, avec celle de la propagation de la chaleur, donna naissance à la théorie des séries de FOURIER (1768-1830).

Le français D'ALEMBERT Jean Le Rond (Paris 1717 - Paris 1783) a le premier donné en 1747, une solution de ce problème qui se ramène à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (avec d'autres notations) : [DaDaPe] p 223[Dieudo] p 47

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

2.a : Notation : [Cajo] et [Encyclo. U]

Le mathématicien allemand JACOBI Carl Gustav Jacob (1804-1851) propose la notation usuelle des dérivées partielles secondes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \ et \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}$$

2.b : Le théorème de SCHWARZ.

EULER et CLAIRAUT considéraient que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations mais c'est le mathématicien allemand SCHWARZ Hermann Amandus (1843-1921) qui prouva en 1873 que la formule : $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_\mathrm{j} \partial x_\mathrm{i}} = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_\mathrm{i} \partial x_\mathrm{j}}$

est valable si l'un des deux membres est continu par rapport à l'ensemble des variables (théorème de SCHWARZ).

Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) donne l'exemple de la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$

prolongée par continuité en posant f(0,0)= 0, pour laquelle les permutations des dérivées partielles n'est pas licite.